

賃金実質化における デフレーターについて

2019年3月

一橋大学経済研究所 阿部修人

実質化の意味

- 経済学の入門書では、かならず、名目と実質の説明がなされ、「物価」を調整することの重要性が強調されている。
- しかし、そもそも、実質化とは、経済理論上何を意味するのか？
- 通常の消費者・生産者理論では、需要関数は相対価格ベクトルの関数であり、実質消費や実質賃金という概念はほとんど出てこない。
- 実質賃金とは商品が一つしか存在しないような、非常に特殊な状況を考察するマクロ経済学固有の概念なのだろうか？
- それとも、多様な商品が存在する、より一般的なミクロ経済学的状況でも意味のある概念なのだろうか？もしもそうなら、理論的な意味のある実質化とはどのようなもので、実際に計算するにはどうあるべきなのだろうか？

本日の内容

- 実質賃金の理論フレームワーク
- 適切な物価指数は何か? 指数の理論
 - 1) 公理・テストアプローチ
 - 2) 経済学的アプローチ
 - 3) Diewertによる最良指数
- 賃金の実質化におけるデフレーターをめぐる論点
 - 1) 指数算式
 - 2) 商品範囲
 - 3) 集計方法
- まとめ
- 参考資料

実質賃金の理論フレームワーク

- i :財のindex, j :個人のindex, t :時間
- q_{it}^j :消費数量、 p_{it} :商品価格、 W_t^j :名目賃金、 E_t^j :支出総額、 L_t^j :労働時間
- 税・補助金・貯蓄なし、所得はすべて労働収入と仮定
- 予算制約:

$$E_t^j = \sum_{i=1}^N p_{it} q_{it}^j = W_t^j L_t^j$$

$$\sum_{i=1}^N p_{it} q_{it}^j = P_t Q_t^j, \quad Q_t^j = \frac{W_t^j}{P_t} \times L_t^j$$

- このような実数値、 $P_t, Q_t^j \in R$, としてどのようなものが考えられるか?

実質賃金の理論フレームワーク

P_t, Q_t^j の1例

$$Q_t^j = u(\{q_{it}^j\}_{i=1}^N) = \left(\sum_{i=1}^N a_{it}^j q_{it}^{j \frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$
$$P_t = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} q_{it}^j}{Q_t^j} = \left(\sum_{i=1}^N (a_{it}^j)^\sigma (p_{it})^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Q_t^j は数量指数だが、効用関数でもある。すなわち、この数量指数の場合、物価指数 P_t で名目支出総額を割った実質消費は効用水準に一致する。この例は現在のマクロ経済分析で頻繁に用いられている。

実質賃金の理論フレームワーク

$E_t^j = P_t Q_t^j$ という支出水準の価格と数量への分割は、ごく特殊な関数形でのみ成立し、一般には成立しないことが知られており、指数理論では原則用いられない。

通常は、時間変化を用いて指数を定義する。

$$\frac{E_t^j}{E_{t-1}^j} = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} q_{it}^j}{\sum_{i=1}^N p_{it-1} q_{it-1}^j}: \text{ Value Index}$$

このValue Index(支出総額比)を価格変化と数量変化に分解 $PI_t, QI_t^j \in R$

$$\begin{aligned} \text{Value Index} &= \text{Price Index} \times \text{Quantity Index} \\ &= PI_t \times QI_t^j \end{aligned}$$

実質賃金の理論フレームワーク

$$PI_t \times QI_t^j = \frac{W_t^j}{W_{t-1}^j} \times \frac{L_t^j}{L_{t-1}^j} = WI_t^j \times LI_t^j$$

$$QI_t^j = \frac{WI_t^j}{PI_t} \times LI_t^j$$

この場合、名目賃金比を物価指数で割ったものが実質賃金(比)となる。これは、労働時間比を乗じると数量指数に一致し、効用水準比、すなわち2時点間の厚生比となる。

実質賃金(実質所得比)は、厚生比に他ならず、実質賃金が1を超えれば経済厚生は改善していることになる。

(ただし、労働時間の変化による厚生の変化は無視していることに注意!)

適切な物価指数は何か? 指数の理論

指数の理論

- 公理・テストアプローチ(あるべき姿の提示)
- 経済学的アプローチ(あるべき姿・現実の指数がどう変動しているのかを解明、予測も視野)
- 確率・統計学的アプローチ(理論というよりも実務的)

の3種類の理論が存在

指数の理論を構築していたのが、経済学者、数学者、統計学者、実務家達と多様。

公理・テストアプローチ

- 理想的な物価指数が満たすべき性質を並べて、それらを満たす指数を探す。
- もしも「望ましい」性質をすべて満たす指数が存在しない場合は、なるべく多くの性質を満たす指数が良い指数となる。
- 物価指数の単調性、計測単位からの独立性、一次同次性などが基本公理となる。
- しかし、いくつかの重要な公理が問題含みとなる。

問題含みの公理1

- 推移性(循環性)

時間が 0,1,2 のように 3 時点あるとする。0→1 期の物価変化と 1→2 期の物価変化の連鎖により 0→2 期の物価変化を得ることができる。

$$PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) PI(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) = PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$$

ある物価指数が推移性を満たす場合、1990年から2000年までの物価指数と2000年から2010年までの物価指数を乗じると、1990年から2010年までの物価指数を得ることができる。残念ながら、現在知られているほとんどの物価指数は推移性をみたさない!

問題含みの公理2

- 要素反転性 (Factor Reversal)

物価指数の価格と数量を入れ替えた指数は数量指数と解釈可能であり、価格指数と数量指数の積は支出比 (value index) と一致する。すなわち、

$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \frac{\mathbf{p}'_1 \mathbf{q}_1}{\mathbf{p}'_0 \mathbf{q}_0}$$

推移性と要素反転性について

- 推移性が満たされない指数は、時系列データとしてみる時に非常に大きな問題になる
- 要素反転性がないと、数量指数として物価指数と異なる指数算式が必要となり、選好がホモセティックでない限り、数量指数の解釈、すなわち実質賃金の解釈が非常に困難になる。
- ほとんどの物価指数は推移性を満たさない。推移性を満たすように連鎖指数(基準時を常に更新していく)と、指数の多くの性質を満たさなくなり、かつ、連鎖ドリフトが発生する恐れがある(指数理論研究のフロンティア)。
- 要素反転性を満たすものとして、フィッシャー指数とSato-Vartia指数が知られているが、ほかの多くの指数は満たさない。

経済学的アプローチ

- 経済理論を用い、効用水準を一定とした場合の支出関数の比を生計費指数と定義し、それを物価指数とする。

$$E(u^t, P^t) = \min_{\{q_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n p_t^i q_t^i : u(q^t) \geq u^t \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^n p_t^i q_t^i$$

$$PI_k(P^0, P^t, q^0) = \frac{E(u(q^0), P^t)}{E(u(q^0), P^0)}$$
$$= \frac{E(u^0, P^t)}{\sum_{i=1}^n p_0^i q_0^i}$$

生計費指数を計算する際の問題点・批判

- 効用関数や費用・支出関数を特定化する必要がある
- しかし、消費者の好みを正確に知ることはとても困難
- 効用に影響を与えるのは商品のみでなく、気候や治安も重要な要素。
- 数量と価格の間に、経済理論が想定するような関係が本当にあるのかも検証せねばならない。
- 選好は個人間でも異なる可能性がある。
- 厳密な生計費指数の計測は事実上不可能。

Diewertの最良指数(公理的アプローチと
経済学的アプローチの統合の試み)

最良指数(superlative index)

- 公理的アプローチで代表的なフィッシャーの理想指数とトルンクビストを計算すると、多くの場合はほぼ一致する。指数算式は全然違うが、よほど極端な状況を考えない限り、両者の違いを見出すのは難しい。
- 背後に、何か根拠(理論)があるのではないか？
- 1976年に、Erwin Diewertが最良指数を提唱
二つのミッション：
 - (1) なぜフィッシャー指数とトルンクビスト指数はよく似ているのか？
 - (2) 効用関数や生産関数を特定化せずに、生計費指数の計算はできないか？

最良指数の考え方

- 数量と価格の間に、経済理論が想定するような関係があると仮定する。しかし、私たちは背後の関数形がわからない。
- 実現した数量と価格の関係から、背後の経済理論の構造をある程度知ることが可能。
- フィッシャー理想算式やトルンクビスト指数には、商品の数×2の数だけのウェイト情報(パラメーター)が含まれている。
- いま、フィッシャー理想算式やトルンクビスト指数を生計費指数にするような、ある特定の効用関数を考える。
- この効用関数には、沢山のパラメーターが含まれている(例えばトランスログ)。
- パラメーターを動かすと、「任意」の効用・生産関数の二階の近似にすることができる(二階の導関数まで局所的に一致する)
- 現実経済を支配する、「真」の効用関数があるとする。すると、フィッシャー指数は、その「真」の効用関数とよく似た(二階の近似)関数の下での生計費指数となる。

最良指数の考え方

- フィッシャー指数やトルンクビスト指数のように、任意の効用・費用・支出関数を二階まで近似した関数のもとで生成される生計費指数と一致するような指数を最良指数(superlative index)と呼ぶ。
- 現在まで、トルンクビスト、フィッシャー、及びウォルシュ指数といった、古典的な3指数が最良指数であることが知られている。なお最良指数自体は無数に存在する。
- 経済理論が正しければ、全ての最良指数は、真の生計費指数の近似になるので動きはよく似たものになるはずである。
- 指数算式は、それが最良指数であれば、自動的に生計費指数の二階の(局所)近似となるので、経済理論的にも正当化される。

最良指数に対する批判

- 局所的な近似性にすぎず、大域的には真の生計費指数と乖離する可能性。
- フィッシャー指数とトルンクビスト指数がよく似た挙動を示すのは、それらが最良指数だからではなく、そこで仮定されている特殊なパラメーター値のためであることが見いだされる, Hill (2006) “Superlative Index Numbers: Not All of them Are Super”。
- 代表的個人を仮定している

実質賃金デフレーターに適切な物価指数
は何か？

主要論点

適切な「指数算式」

適切な「商品範囲」

適切な「集計方法」

指数算式(フィッシャー指数)

- フィッシャー指数は、Diewert の最良指数であり、かつFactor Reversalを満たす唯一知られている指数算式。したがって経済学的根拠があり、かつ公理的アプローチでもFactor Reversalを満たす望ましい性質を有する。
- 計算には基準時・比較時両方における、各商品への支出シェア情報が必要だが、効用関数の仮定は不要。

問題:

- 推移性を満たさない(1990年から2000年までの物価変化比と、2000年から2010年までの物価変化比を乗じたものと、1990年から2010年までの物価変化比が一般に一致しない)
- したがって、実質賃金の通時的変化を分析する際には、基準時をいつにするかにより結果が大きく異なる可能性があることに留意する必要がある。
- もっとも、推移性をみたす指数はごく一部しか知られておらず、現在、指数理論研究の最先端(GEKS, GK, Spanning Tree, etc.)であるが、根本的な解決策はいまのところ見つかっていない(SNAでは連鎖指数で対応)

指数算式(ラスパイレス指数)

ラスパイレス指数は、計算の際に比較時の支出シェア情報が不要であり計算が容易。

総務省全国消費者物価指数(総務省CPI)で採用されている

問題:

生計費指数ではなく、物価に上方バイアスが生じてしまい、数量指数には下方バイアスが生じる(実質賃金及び厚生変化を過少評価する)。ラスパイレス指数の使用を正当化するには、極めて強い仮定が必要(支出シェアが不変)になり、非現実的。

上方バイアスの度合いが時間経過とともに変化しないなら上方バイアスの存在をある程度織り込むことが可能になるが、このバイアスは多くの場合一定ではない。特に、相対価格が大きく変化するときには、このパーセンギャップは拡大する可能性がある。

「パーシェ・チェック」の結果(全国、持家の帰属家賃を除く総合)

基準時	比較時	ラスパイレス指数 (L)	パーシェ指数 (P)	パーシェ・チェック $\left(\frac{P-L}{L} \right)$
1990 年基準	1995 年平均	106.4	106.2	▲0.2
1995 年基準	2000 年平均	101.0	99.9	▲1.1
2000 年基準	2005 年平均	97.3	94.9	▲2.5
2005 年基準	2010 年平均	99.7	93.1	▲6.6
2010 年基準	2015 年平均	104.6	103.8	▲0.7

総務省統計局(2016)「パーシェ・チェック」の結果
について

実際に指数を計算する際の留意事項

- 総務省全国消費者物価指数は、基準年が5年に一度改定されており、基準年からの物価変化を見る場合はラスパイレス指数となるが、基準年以外からの変化を見る場合は、固定ウェイトのロウ指数となっている(Weightが基準時とも比較時とも無関係)
- フィッシャー指数を計算するには、基準時と比較時両方のWeightが必要。家計調査の支出情報から両時点のウェイトを入手可能。計算そのものは、総務省CPIと家計調査の品目はほぼ一致しているため、ラスパイレスもパーシェも、エクセルで一瞬で計算可能。
- ただし、公表されている総務省CPIとは乖離が生じうる。
- 毎月、基準時をずらしていく指数は連鎖指数となる。一般に、連鎖指数は、積分(次々とsequentialに連鎖指数を乗じていく)すると、ドリフトが生じることが知られている。毎月の連鎖指数から年単位の物価指数を構築することは問題があり、年単位のデフレーターは別個作成する必要がある。

総務省CPIを用いる場合の留意事項

- 帰属家賃を除く総務省CPIを用いる場合、それが生計費指数になっておらず、経済学上、実質賃金の解釈が困難になる。
- 総務省CPIに上方バイアスが生じると、実質賃金には下方バイアスが生じる。特に、基準年から時間が経過すると、バイアスは大きくなり、かつ、基準改定時に大きく変化する可能性がある。
- 自分でWeightを作っていれば基準改定時の影響は小さくなる
- リーマンショックなど、大きなショックが生じたときには、バイアスの度合いも大きくなる可能性がある。

適切な商品範囲(帰属家賃、家庭内労働)

- 経済理論上、数量指数を効用水準と解釈するなら、効用に影響を与える要因をすべて考慮するのが適切。
- 賃貸から持ち家にシフトする家計が増減する場合、もしくは専業主婦から家事代行利用にシフトする家計が多い場合、家計の厚生には変化がなくとも、支出額や物価水準には大きな影響を与えかねず、厚生評価の点では大問題。
- 国民経済計算には帰属家賃が含まれており、かつ多くの国で帰属家賃は家計消費の10%程度を占め、無視できない大きさとなっている。一方、帰属家賃の計算は一般に困難であり、その推計手法には多くの問題が指摘されている。帰属家賃の高精度の推計は困難で、そのシェアの大きさも考えると、帰属計算を行うことで物価統計全体の精度を引き下げる危険性もある。
- 現在の総務省が採用している帰属家賃の計測方法に対しては批判も多いが、どれが「正しい」帰属家賃なのかは、そもそも正解が観察不可能なので、議論が収束していない。
- 家計内労働も、その品質、家計内労働から得られる効用などの扱いに関して、意見の一致をみることは困難。SNAではサテライト勘定になっている。

適切な商品範囲(帰属家賃、家庭内労働)

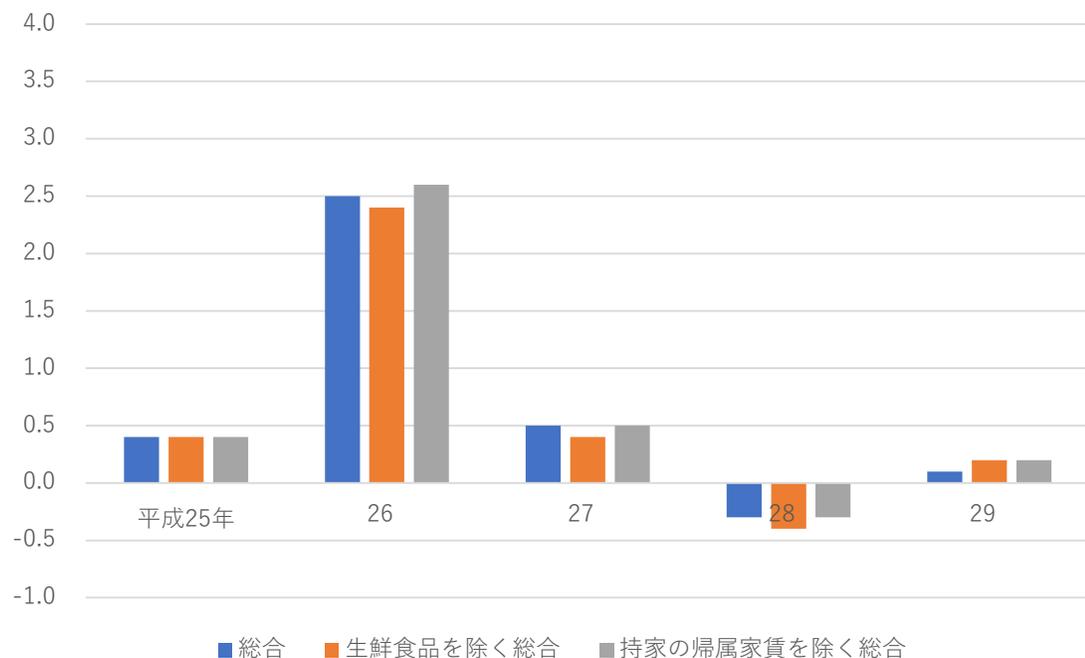
- フィッシャー指数を計算する場合は、帰属家賃や家庭内労働サービスの支出シェアが必要となるが、家計調査にはこれらの調査項目がない(5年に一度の全国消費実態調査から帰属家賃を計算)。
- 帰属家賃支出を含める場合は、帰属家賃所得も同時に考慮する必要がある。帰属家賃が上昇した場合は、帰属家賃所得も上昇している。そのため、厚生に与える影響は直接的にはない(間接的には、財間の代替を通じて影響はありうる)。
- 帰属家賃を物価に入れる一方、帰属家賃所得を考慮しない場合、帰属家賃増加による実質賃金の低下が生じたとき、厚生は悪化すると解釈するのは必ずしも適切ではない。
- 帰属家賃や家庭内労働サービスの価格推計そのものに対する疑問も多く、問題は山積。
- 帰属家賃は、実質賃金の計算には含めないほうが適切と(私は)考える
- 家庭内労働サービスに関しては、そもそも価格も支出情報もないため帰属計算を毎月行わねばならず、実質賃金デフレーターに採用するのは極めて困難。
- しかし、家庭内労働サービスを無視することによって、非労働力人口の増大は厚生の増加を伴うことになってしまふことには留意する必要がある。

適切な集計方法(個人、地域情報)

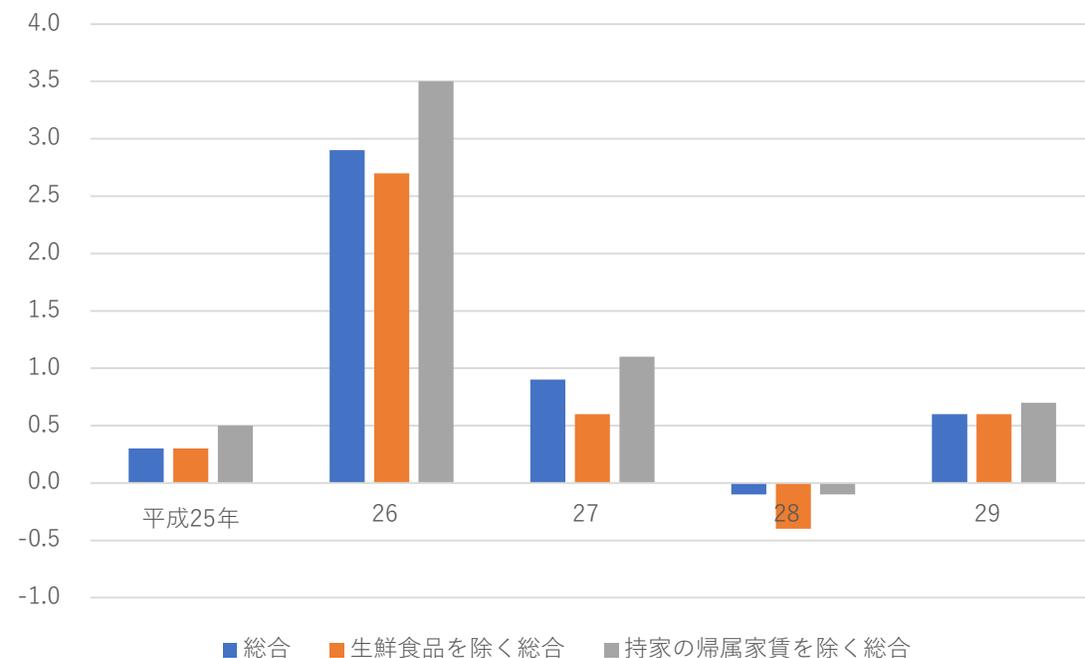
- 個人により、購入する商品やその価格は異なる。
- 同一商品を購入する場合でも、コンビニエンスストア、大規模スーパー、インターネット通販では異なる価格となる(一物一価は不成立)。それらはすべて「異なる」商品とみなすべき。
- 個人属性間で物価指数がどの程度異なるかについては多くの計算の蓄積がある。アメリカでは高齢層は低い物価に、日本やイギリスでは高い物価に直面している。
- 理想的には、個人毎の物価指数を計算することが望ましい。
- 現実には、ある程度のグルーピングをおこない、男女、就業形態(正規・非正規)、地域・都市階級毎に集計し、各グループ内では個人は同一と仮定して物価指数を計算することが次善。

消費者物価対前年変化率

29歳以下



60~69歳



まとめ

- 実質賃金は、適切な物価指数によりデフレートすることで厚生指標となる。
- 適切な物価指数として最良指数を用いる場合、フィッシャー指数が望ましい。ただし、家計調査の品目別データを用い、毎月計算する必要がある。
- ラスパイレス指数には上方バイアスが発生し、実質賃金に下方バイアスがかかる。下方バイアスが通時的に一定であるとは限らず、大きな相対価格の変化の際には無視できないサイズになる可能性がある。
- 帰属家賃は、帰属所得の影響を無視して物価指数に含めると、厚生評価にバイアスがかかってしまう。また、精度の低いデータを含めることで、統計量全体の精度が低下する危険性もある。
- 集計する際には、なるべく個人の属性をコントロールすることが望ましい。

參考資料

物価指数の公理的アプローチ

「公理」は英語の axiom、ラテン語の axiōma の翻訳であり、「正しいとみなされるもの」、という意味である。指数理論における「公理」は、「仮定」と同じ意味であり、指数が満たすべき性質を示している。公理はテストと呼ばれることもあるが、ここでは指数に対する要請、仮定はすべて公理と呼ぶことにする³。

指数理論における公理的アプローチの目的は二つである。第一は、様々な指数がどのような公理をいくつ満たすか、あるいは満たさないかを整理し、指数間の序列を作ること。第二は、特定の指数を必要十分条件として導き出すような公理の組み合わせを求め、指数のもつ数学的特徴を明確にする指数の特定化 (characterization) である。このため、公理的アプローチはどのようにして

すなわち、指数が満たすべき(と皆が思う)性質を並べて、それらをみたす指数が一つしかないなら、それで目的達成。
そういう指数が存在しない場合は、なるべく多くの性質をみたす指数が良い指数となる。

公理的アプローチの起源

- 後にオランダの総理大臣となる経済学者、N.G.Piersonが1896年に論文を発表
- 当時まで知られていた主要物価指数のすべてが、重要な性質をもっていないことを発見。

$$PI_{0t}^L = \sum_{i=1}^N w_0^i \left(\frac{p_t^i}{p_0^i} \right) \quad \text{0期と1期をひっくり返すと} \quad PI_{t0}^L = \sum_{i=1}^N w_t^i \left(\frac{p_0^i}{p_t^i} \right)$$

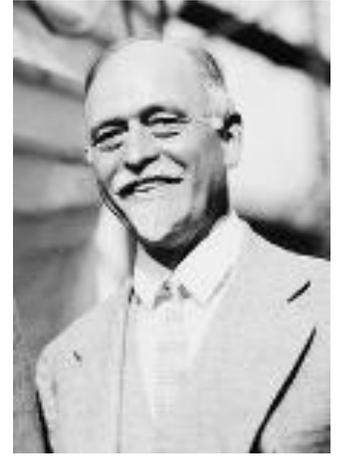
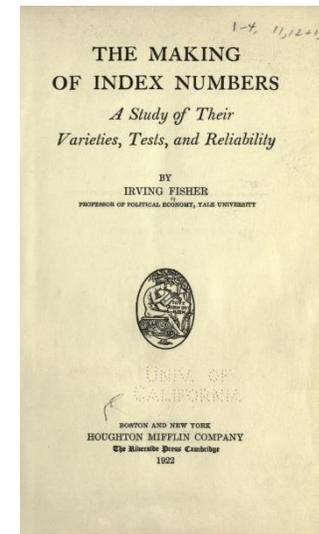
$$PI_{0t}^L \neq \frac{1}{PI_{t0}^L} \quad \text{Piersonは指数研究をやめるべき、という過激な結論を導き論争になる}$$

公理的アプローチの確立

Irving Fisher (1867-1947)

による物価指数に関する大著

- The Making of Index Numbersが出版
それまで知られていた指数算式すべても含む、数百の指数算式を並べる。
- 指数が満たすべき「望ましい性質」を並べ、どの指数がいくつの望ましい性質をみたすか、数える。
- 前述のラスパイルスとパーシェの単純幾何平均が最も優秀であったため、それを理想算式(ideal index)と名付ける。
- 今日に至るまで大きな影響力。
- 今日の視点では、数学的に詰めが甘い。彼がしていなかった証明、あるいは推測の検討が行われ、指数理論という一大分野に発展。



今日の公理的アプローチ

0期と1期の財の種類が n 個で同一であり、 \mathbf{p}_t 、 \mathbf{q}_t をそれぞれ t 期の価格、数量ベクトルとし、どちらも厳密に正の値をとると仮定しよう。物価指数 PI は $4n$ 次元の正值実数空間から一次元の正值実数への写像と定義される。

$$PI : \mathbf{R}_{++}^{4n} \rightarrow \mathbf{R}_{++}$$
$$(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) \rightarrow PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$$

PIが満たすべき性質を列挙し、その数学的な構造を探っていくのが公理的アプローチ

基本公理

- 単調性: 物価が上昇するならPIは増加せねばならない。
- 一次同次性: すべての物価がa倍になるなら、PIはaになる。
- 恒等性: すべての価格が普遍ならPIは1になる。
- 次元性: 通貨単位を変更してもPIは不変である
- 位無差別性(commensurability): ある財の数量を $1/x$ 倍、価格を x 倍してもPIは変わらない。

これらの公理はみたされて当然とみなされている(実際には、トルンクビスト指数は単調性をみたさない)

問題含みの公理1

- 推移性(循環性)

時間が 0,1,2 のように 3 時点あるとする。0→1 期の物価変化と 1→2 期の物価変化の連鎖により 0→2 期の物価変化を得ることができる。

$$PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) PI(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) = PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$$

- 時間反転性

基準時と比較時を入れ替えると、物価指数はその逆数となる、すなわち、

$$PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \frac{1}{PI(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)}$$

問題含みの公理2

- 要素反転性 (Factor Reversal)

物価指数の価格と数量を入れ替えた指数は数量指数と解釈可能であり、価格指数と数量指数の積は支出比 (value index) と一致する。すなわち、

$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \frac{\mathbf{p}'_1 \mathbf{q}_1}{\mathbf{p}'_0 \mathbf{q}_0}$$

推移性について

消費者物価指数でも、鉱工業生産指数でも、前年同期比が非常に重視される

一昨年と去年、去年と今年の変化率を加えたら、一昨年から今年の変化率になるか否か?推移性がない指数は、この操作ができない。常に、基準時からの比較をする必要がある。

しかし、江戸時代と平成の世の中の物価を測るとき、江戸時代と明治、明治と大正、大正と昭和、昭和と平成、の比較はそれぞれ高精度で可能だが、江戸時代と平成の直接比較は無理では?

推移性が満たされない指数は、時系列データとしてみる時に非常に大きな問題になる

Funke, Hacker, and Voellerの定理

(1979) は、 $PI : \mathbf{R}_{++}^{4n} \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ で、単調性 (A-1)、一次同次性 (A-2)、恒等性 (A-3)、位無差別性 (A-5)、と循環性 (T-1) をみたすものは、下記のコブダグラス型、

$$PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} \right)^{\alpha_i}, \alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1$$

のみである。

すなわち、推移性をみたすには、ウェイトが一定の幾何平均にするか、それとも、二時点以外の情報も利用する(PIの定義域を拡大する)かどちらかしかない。

公理的アプローチの限界

- 第一回ノーベル賞を受賞するRagner Frischは、要素反転性と推移性が互いに矛盾する、すなわち、両者を同時にみたす指数算式は存在しないことを証明した。
- Fisher本人は、推移性をみたす指数算式がほとんどないことを自覚。苦しい説明により、時間反転性で推移性の代替となると主張。
- 時間反転性をみたす指数算式も決して多くない(ラスパイレス、パーシェは満たさない)。
- 満たすべき重要な公理が互いに矛盾(論理的に、みたす指数算式が存在しない)ことで、公理的アプローチのみで指数算式を一つに絞ることは不可能になった。

経済学的アプローチ

経済学アプローチの歴史

- 1924年、ロシアの経済学者 A. A. Konüsがロシア語で発表
- 1939年に、経済学最高権威誌Econometricsに英訳が掲載
今日の経済学的アプローチの中心的な発想が展開される。
もっとも、戦後の経済学の進展により、今日では数学的にはよりエレガントに記述可能。
- 1940年代にはAllenにより便利なモデルが提唱され、80年代にはDiewert達により、今日の「数量」指数でよく用いられるマルムキスト指数が提唱される。
- 強い仮定が必要となり、指数作成実務家達の間では一般に不評。
ヨーロッパとアメリカで評価が特に分かれる(アメリカは経済学的アプローチ、ヨーロッパは公理的アプローチ重視)。日本の総務省は折衷だが、経済学的アプローチには距離をとっている。

生計費指数の発想

- 経済学的アプローチでは、物価指数は生計費指数として考えられる。
- 0期と1期の間の物価指数=0期において実現していた効用水準(生活満足度)を1期の商品価格のもとで実現するためには最低限、所得がどれだけ増加(減少)する必要があるか?
- Fleetwood達による物価指数では、0期の価格において購入可能な商品を1期の価格で購入するには、最低限所得がどれだけ増加(減少)する必要があるか?

すなわち、効用(utility)という経済学の概念を導入する

なぜ効用という概念が必要か？

- ある商品の価格が他の商品にくらべ増加すると、その商品への需要は一般に下がるはず。
- 消費者は、新しい価格のもとで、彼らが希望する商品の組み合わせを購入する
- 物価指数を計算する際に必要なWeightが変化する
- 基準時のウェイトを利用するラスパイレス指数では、必要な所得を過大に評価してしまう(物価変化の過大評価)。パーシェ指数では逆に過小評価。
- 消費者がなぜ、どのくらい、割安な商品に消費を変化させるかを織り込まないと、物価を「正しく」測ることはできないはず。

生計費指数の計算方法

t期で、効用水準uを実現するために必要な最低所得をE(u,pt)する

$$\begin{aligned} E(u^t, P^t) &= \min_{\{q_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n p_t^i q_t^i : u(q^t) \geq u^t \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n p_t^i q_t^i \end{aligned}$$

0期の価格でu(q0)が実現できているとする。T期の価格でu(q0)を実現するために必要な所得はE(u(q(0)), Pt)。すると、二つの所得の比が生計費指数。

$$\begin{aligned} PI_k(P^0, P^t, q^0) &= \frac{E(u(q^0), P^t)}{E(u(q^0), P^0)} \\ &= \frac{E(u^0, P^t)}{\sum_{i=1}^n p_0^i q_0^i} \end{aligned}$$

生計費指数の背後

- 生計費指数を計算する際、数量と価格の間に理論的な関係があると仮定されている。
- 公理的アプローチでは、数量と価格の間にはなんの関係も仮定されていなかった。より一般的な状況。
- 経済学的アプローチでは、数量と価格の間には経済法則(消費者物価指数であれば消費者理論、卸売り物価指数であれば生産者理論)が成立していると仮定されている。
- 経済法則を信じるか否かが生計費指数への評価の根幹にある。
- 経済学者と統計学者、実務家の間で評価が大きく分かれる。

経済学的アプローチの利点

- 何を指数の対象にするべきか、明確になる。
- 例えば、持ち家の費用を考える。
- 持ち家は、維持管理のための費用はかかっても、家賃は発生しない。
- しかし、持ち家から居住というサービスを得ているのであれば、それは人々の幸せ度、効用に影響を与えているはず。
- 持ち家のサービスの変化があれば、効用が変化し、さらには生計費指数も変化する。
- 持ち家のサービスに対する支払も物価指数に取り込むべき
- しかし、実際には持ち家のサービスへの支払いは行われておらず、価格情報もない。そこで、様々な手法を用いて、消費者が、自分で自分に家賃を支払っていると仮定し、「帰属」家賃を物価指数に取り込むべき。
- アメリカと日本では帰属家賃は消費者物価指数の一部。ヨーロッパでは含まれていない。市場で取引されていない商品の価格は物価指数にいれるべきでないという判断。
- もっとも、同じ議論は、育児や家庭内労働、ジョギングや散歩などの余暇活動一般にもあてはまるはず。市場取引されていない活動の価格をどう測るか、物価やGDPにどこまで含めるべきかは、どの時代でも論争になる。

生計費指数を計算する際の問題点・批判

- 効用関数や生産関数を特定化する必要がある。
- しかし、消費者の好み、や、生産者の持つ技術を正確に知ることとはとても困難。
- さらに、世の中には無数の消費者や企業があり、それらを集計する価格・数量指数を、経済理論に基づいて作成することも非常困難。
- たとえ、世の中の消費者の好み(効用関数)や企業の生産技術が同一であっても、それを知ることとはとても難しい。
- 数量と価格の間に、理論が想定するような関係が本当にあるのかどうかも検証せねばならない

Diewertの最良指数(公理的アプローチと
経済学的アプローチの統合の試み)

最良指数(superlative index)

- 公理的アプローチで代表的なフィッシャーの理想指数、トルンクビストを計算すると、多くの場合はほぼ一致する。指数算式とは全然違うが、よほど極端な状況を考えない限り、両者の違いを出すのは難しい。
- 背後に、何か理論があるのではないか？
- 1976年に、Erwin Diewertが最良指数を提唱
二つのミッション：
 - (1) なぜフィッシャー指数とトルンクビスト指数はよく似ているのか？
 - (2) 効用関数や生産関数を特定化せずに、生計費指数の計算はできないか？

最良指数の考え方

- 数量と価格の間に、経済理論が想定するような関係があると仮定する。しかし、私たちは背後の関数形がわからない。
- 実現した数量と価格の関係から、背後の経済理論の構造をある程度知ることが可能。
- フィッシャー理想算式やトルンクビスト指数には、商品の数×2の数だけのウェイト情報が含まれている。
- いま、フィッシャー理想算式やトルンクビスト指数を生計費指数にするような、非常に特殊な効用関数(Quadratic Mean Order r やトランスログ)。
- これら、「特殊」な効用・生産関数には、様々なウェイトを許容するような、沢山のパラメーターが含まれている。
- パラメーターを動かすと、「任意」の効用・生産関数の二階の近似にすることができる(二階の導関数まで一致する)
- すなわち、フィッシャー指数とトルンクビスト指数は、任意の効用・生産関数を二階まで近似した関数のもとで生成される生計費指数と一致する。
- 現実経済を支配する、「真」の効用・生産関数があるとする。すると、フィッシャー指数とトルンクビスト指数は、その「真」の効用・生産関数とよく似た(二階の近似)の関数の下での生計費指数となる。

最良指数の考え方

- フィッシャー指数やトルンクビスト指数のように、任意の効用・生産関数を二階まで近似した関数のもとで生成される生計費指数と一致するような指数を最良指数(superlative index)と呼ぶ。
- 現在まで、トルンクビスト、フィッシャー、及びウォルシュ指数の、古典的な3指数がsuperlative indexであることが知られている。Superlative index自体は無数に存在。
- 経済理論が正しければ、全てのsuperlative indexは、真の生計費指数の近似になるので動きはよく似たものになるはずである。

換言すると

- フィッシャー理想算式とトルンクビスト指数は、背後の経済理論を知らなくとも、生計費指数になっている。
- 背後の効用関数や生産関数を特定化する必要はない。
- 両指数はよく似ているので、どちらを選択するかは好みの問題。乗法(対数)算式が良いか、算術算式がよいかの問題。
- 公理的アプローチと経済学的アプローチは対立しない。

最良指数の登場により、経済学的アプローチに距離をおいて実務家達も無視できなくなり、20世紀末に最良指数をどう考えるか、世界で大論争が勃発。アメリカは最良指数を目指す。ヨーロッパは明確に反発。今でもDiewertは指数理論において絶大な影響力。

最良指数への批判

- 2006年、Diewertの指導を受けたRobert Hillが、最良指数間で非常に大きな違いが生じうることを発見。Diewertの結論の一つ、異なる最良指数の間の相違は小さい、という結論は一部の最良指数に限定されていた。
- 最良指数は、代表的な家計・企業の存在を仮定しており、非現実的。
- 経済理論に忠実に生計費指数を考えると、治安や気温、天候、環境など、効用水準に与え、かつ時間と共に変化する要因は多数あり、それらを取り込むのは非常に困難。
- 最も大きな批判は、フィッシャー指数やトルンクビスト指数を計算する際に、比較時点と基準時点の両時点におけるウェイト情報が必要であり、これは困難。
- アメリカ合衆国でも、最良指数であるトルンクビスト指数は参考系列という扱い。

確率(統計)的アプローチ

確率(統計)的アプローチ

- 個々の商品価格の変動を確率変数とみなす

$$\ln \frac{p_t^i}{p_0^i} = v_t + \varepsilon_t^i$$

v_t : 各商品に共通の因子(common factor)

ε_t^i : 各商品固有の誤差項(ほかの商品や過去値と無相関)

物価指数の推計を、共通因子, v_t ,の推計をすることとみなす

確率(統計)的アプローチの起源

- 1923年、数理経済学者、F.Y. Edgeworthが提唱。
- 推移性が成立しない公理的アプローチに対し、 v_t を全期間の情報を用いて一気に推計することで時系列的にも望ましい性質を有する「物価指数」を計算可能となる。
- ケインズおよびウォルシュにより、当時激烈な批判を受け、急速に衰退。
- 個別商品価格の下落や上昇に背後には経済活動があり、それらが他の商品や過去の変化から独立しているという仮定には確かに無理がある。
- しかし、20世紀末になり復活。現在は、特に、地域間・国家間の物価指数(Purchasing Power Parity)の計算の際に活用されている。

現代的確率(統計)的アプローチ

- Prasada Rao、Clemens, Izan達により復活(さらにその前にはサマーズ(父)が70年代に利用)
- 価格変化を統計モデルとして定式化
- 回帰分析(最尤法、モーメント法等)で共通因子を推計
- 推定の際のウェイトを操作することで、ラスパイレス指数やトルンクビスト指数など、様々な代表的指数算式を推定量として得ることが可能
- 回帰分析なので、統計量には標準誤差(正確さの指標)がついてくる
- 得られた指数にどの程度の精度があるかを得ることが可能
- 推移性をみたすような共通因子を得ることも可能
- 0期と1期で同じ商品を見つけるのが難しいとき、多少の商品の違いは回帰分析で調整することが可能(国間物価指数の作成の際に大活躍)

確率(統計)的アプローチへの批判

- 誤差項の分布が、推計の際(最尤法)に仮定されている分布と大きく違う
- 得られる指数の標準誤差が何の誤差を反映しているのか不明(調査対象商品のサンプリングエラー?しかし、調査対象商品は全国平均価格であることが多い)
- 最小二乗や最尤法の際のウェイトの中に価格情報が含まれており、ウェイトも確率変数になってしまう。それを定数とみなして推計するのはおかしい
- 現在は、標準的な物価指数や数量指数を作成する際には利用されず、もっぱら国別物価指数作成の際、それも詳細な商品単位の比較の際に活用されている
- しかし、big dataの活用が叫ばれている今日、非常に多くの変数の共通因子を見つけ出そうとするこのアプローチの可能性はもっと開拓される可能性が高い